電磁場中の流体の運動方程式(Navier-Stokes方程式の解の動的構造)

今井, 功

今井, 功. 電磁場中の流体の運動方程式(Navier-Stokes方程式の解の動的構造). 数理解析研究所講究録 1988, 637: 117-139

1988-01

数理解析研究所講究録
637巻 1988年 117-139

電磁場中の流体の運動方程式

今井　功　(Isao IMAI)

§1.　はじめに

電磁場中での流体のつりあいや運動を議論するためには，流体の各部分に働く電磁力についての知識が必要である．　ところが，現在でもこれについて確立した統一見解は存在しないように見える．　たとえば，物体の単位体積あたりに働く静電力として，

$$\mathbb{f}_{Kel} = (\mathbb{P}\cdot \mathrm{grad})\mathbb{E},$$

$$\mathbb{f}_{Helm} = -\frac{1}{2}\mathbb{E}^2 \mathrm{grad}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\mathrm{grad}\left\{\mathbb{E}^2\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T\right\}$$

などが用いられている．$\mathbb{E}$ は電場，$\mathbb{P}$ は電気分極，ε は誘電率，ρ は密度，T は絶対温度である．　$\mathbb{f}_{Kel}$ は Kelvin 力とよばれ，真空中の非一様な静電場の中におかれた電気２重極に働く力からの類推によって Kelvin の提唱したものである．　また，$\mathbb{f}_{Helm}$ は Helmholtz 力とよばれ，エネルギー的考察によって Korteweg と Helmholtz が導いたものである．

筆者は“電磁場は運動量とエネルギーの保存法則が成り立つ体系である”という基本原理に基づいて電磁気学を再構成することを試みているが，その１つの応用例として，任意の誘電性と磁性をもつ流体の運動を議論するための基礎方程式を与えることができる．　これによって上述の電磁力に関する

疑問は氷解する． とくに，非粘性の流体に対しては Bernoulli の定理の拡張に相当する美しい公式が得られる．

本文では，流体力学への応用を目標として，‘再構成された電磁気学’を要約する．

§2． 電磁場の基本法則

真空中の電磁場の基本法則はつぎのようにまとめられる．

I．電磁場は電気力線と磁力線の走る空間である． 電磁場を含む体系について，運動量とエネルギーの保存法則が成り立つ． 力線はつぎの性質をもつ．

II．（力線の幾何学的性質）

（i） 真空中では力線はとぎれることなく続いている． 正の電荷からは電気力線がわき出し，負の電荷に吸いこまれる． 磁荷は存在しない．

以上の性質を定量的に表わすために，電束密度 $\mathbb{D}$ ，磁束密度 $\mathbb{B}$ ，電荷 Q ，電荷密度 ρ を定義する：

$$\iint_S \mathbb{D}\cdot d\mathbb{S} = Q = \iiint_V \rho\, dV, \tag{2.1}$$

$$\iint_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = 0. \tag{2.2}$$

（ii） 電荷は保存する． これを定量的に表わすために，電流密度（ベクトル） $\mathbb{J}$ を定義する：

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S \mathbb{J}\cdot d\mathbb{S}. \tag{2.3}$$

（iii） 線形性． ある２つの電磁場が存在するならば，それらを重ね合わせた電磁場も存在し得る．

III．（力線の力学的性質）

$\mathbb{D}$, $\mathbb{B}$ に付随して 電場 $\mathbb{E}$ ，磁場 $\mathbb{H}$ を

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbb{D}, \qquad \mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbb{B} \tag{2.4}$$

で定義する． ε_0 ，μ_0 はそれぞれ真空の誘電率 および 透磁率 である．

（ｉ） 電磁場には電磁エネルギー および 電磁運動量 が貯えられる．それらは単位体積あたり

$$U = \frac{1}{2}(\mathbb{E}\cdot\mathbb{D} + \mathbb{H}\cdot\mathbb{B}), \tag{2.5}$$

$$g = \mathbb{D}\times\mathbb{B} \tag{2.6}$$

である．

(ii) 電磁場の中の任意の面を横切って電磁エネルギーおよび電磁運動量の‘流れ’がある． それらは単位面積，単位時間あたり，それぞれ

$$\mathbb{S} = \mathbb{E}\times\mathbb{H}, \tag{2.7}$$

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{E}D_n + \mathbb{H}B_n - U\boldsymbol{n} \tag{2.8}$$

である．

$$\mathbb{T}_n = \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n} = T_{ik}n_k, \tag{2.9}$$

$$T_{ik} = E_iD_k + H_iB_k - U\delta_{ik} \tag{2.10}$$

と書ける． $\mathbb{S}$ は Poynting ベクトル， T_{ik} は Maxwell 応力 である．

(iii) 真空中（ $\rho = 0$, $\mathbb{J} = 0$ ）では電磁エネルギーも電磁運動量も消滅しない．

以上の基本法則によって真空中の電磁場は完全に記述される．

§３． 電磁場の基礎方程式

§２で述べた基本法則からつぎの諸関係式が‘定理’として導かれる．

$$div\,\mathbb{D} = \rho, \qquad div\,\mathbb{B} = 0, \tag{3.1}$$

$$rot\,\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0, \quad rot\,\mathbb{H} - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{J}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\mathbb{J} = 0, \tag{3.3}$$

$$\mathbb{f} = \rho \mathbb{E} + \mathbb{J} \times \mathbb{B}, \tag{3.4}$$

$$W = \mathbb{J} \cdot \mathbb{E}. \tag{3.5}$$

(3.1), (3.2) は Maxwell の方程式, (3.3) は電荷保存の方程式である.

$\mathbb{f}$ は単位体積, 単位時間あたりの電磁運動量の消滅を表わす. 運動量保存の法則により, $\mathbb{f}$ は'機械的な'運動量に転換される. つまり, $\mathbb{f}$ は 電磁力 を表わすのである. 同様に W は単位体積, 単位時間あたりの電磁エネルギーの消滅を表わす. 電荷が速度 $\mathbb{v}$ で運動するばあい

$$\mathbb{J} = \rho \mathbb{v} + \mathbb{j} \tag{3.6}$$

とおけば, $\rho \mathbb{v}$ は '携帯電流'密度, $\mathbb{j}$ は '伝導電流'密度 である. このとき

$$\begin{aligned} Q_J &\equiv W - \mathbb{f} \cdot \mathbb{v} \\ &= \mathbb{j} \cdot (\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

は電磁エネルギーの消滅 W のうち, 機械的エネルギーに転換したもの ($\mathbb{f} \cdot \mathbb{v}$) をさしひいた残り, すなわち熱の発生を意味する. いわゆる Joule 熱 である. Ohm の法則:

$$\mathbb{j} = \sigma (\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B}) \tag{3.8}$$

が成り立つばあい, (3.7) は

$$Q_J = \frac{j^2}{\sigma} \tag{3.9}$$

となる. σ は 電気伝導率 である.

なお, (3.2) を積分形で表わせば

$$\frac{\partial \Phi(S)}{\partial t} = -\int_C \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \Phi(S) = \iint_S \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \Psi(S)}{\partial t} + \iint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_C \mathbb{H} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \Psi(S) = \iint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} \tag{3.11}$$

となる. $\Phi(S)$, $\Psi(S)$ はそれぞれ開曲面 S をつらぬく 磁束 およ

び 電束 を表わす． 閉曲線 C は S の縁である． (3.10) は Faraday の誘導法則，(3.11) は Ampère の回路法則（の一般化）である．

§ 4． 物質中の電磁場

物質中の電磁場は，微視的には，物質を構成する無数の原子・分子によるものとして極めて複雑である． しかし，なんらかの平均操作によって，これを巨視的な滑らかな電磁場で代表させることができるだろう． そのためには ‘意味のある’ 平均値をとることが必要である． ふつうは単に空間的な平均値

$$\langle Q \rangle \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} Q\, dV \tag{4.1}$$

だけを使っているが，ベクトル量 $\mathbb{F}$ に対しては，新しく２種の平均値 $\langle \mathbb{F} \rangle_\perp$ ，$\langle \mathbb{F} \rangle_\parallel$ を導入する． すなわち ‘横の平均’ および ‘縦の平均’ である．$\langle \mathbb{F} \rangle_\perp$ は

$$\langle \mathbb{F} \rangle_\perp \overset{def}{=\!=} \langle F_x \rangle_\perp \mathbb{i} + \langle F_y \rangle_\perp \mathbb{j} + \langle F_z \rangle_\perp \mathbb{k} \tag{4.2}$$

で定義される． ただし

$$\langle F_n \rangle_\perp \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \iint_{\Delta S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}, \qquad \Delta \mathbb{S} = \mathbb{n}\, \Delta S \tag{4.3}$$

は $\mathbb{F}$ の $\mathbb{n}$ 方向の横平均 である． また $\langle \mathbb{F} \rangle_\parallel$ は

$$\langle \mathbb{F} \rangle_\parallel \overset{def}{=\!=} \langle F_x \rangle_\parallel \mathbb{i} + \langle F_y \rangle_\parallel \mathbb{j} + \langle F_z \rangle_\parallel \mathbb{k} \tag{4.4}$$

で定義される． ただし

$$\langle F_e \rangle_\parallel \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \int_0^P \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}, \qquad \overrightarrow{OP} = \Delta \mathbb{r} = \mathbb{e}\, \Delta s \tag{4.5}$$

は $\mathbb{F}$ の $\mathbb{e}$ 方向の縦平均 である． このように定義すると

$$\langle F_n \rangle_\perp = \langle \mathbb{F} \rangle_\perp \cdot \mathbb{n}, \qquad \langle F_e \rangle_\parallel = \langle \mathbb{F} \rangle_\parallel \cdot \mathbb{e}, \tag{4.6}$$

$$\iint_{\Delta S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \langle \mathbb{F} \rangle_\perp \cdot \Delta \mathbb{S} + o(\Delta S), \tag{4.7}$$

$$\int_C \mathbb{F} \times d\mathbb{r} = \langle \mathbb{F} \rangle_\perp \times \Delta \mathbb{r} + o(\Delta s), \tag{4.8}$$

$$\int_0^P \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \langle \mathbb{F} \rangle_\parallel \cdot \Delta \mathbb{r} + o(\Delta s) \tag{4.9}$$

が成り立つ.

電磁場を表わす基本的な物理量 $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, ρ , $\mathbb{J}$; $\mathbb{B}$, $\mathbb{H}$ の定義から考えて, '意味のある' 平均値 として

$$\hat{\rho} = \langle \rho \rangle, \tag{4.10}$$

$$\hat{\mathbb{D}} = \langle \mathbb{D} \rangle_{\perp}, \quad \hat{\mathbb{B}} = \langle \mathbb{B} \rangle_{\perp}, \quad \hat{\mathbb{J}} = \langle \mathbb{J} \rangle_{\perp}, \tag{4.11}$$

$$\hat{\mathbb{E}} = \langle \mathbb{E} \rangle_{\parallel}, \quad \hat{\mathbb{H}} = \langle \mathbb{H} \rangle_{\parallel} \tag{4.12}$$

を採用する. このように定義すると, (4.8) により, (2.1) ~ (2.3) からただちに

$$\iint_S \hat{\mathbb{D}} \cdot d\boldsymbol{S} = Q = \iiint_V \hat{\rho}\, dV, \tag{4.13}$$

$$\iint_S \hat{\mathbb{B}} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S \hat{\mathbb{J}} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.15}$$

が得られる. また, (4.9) を使えば, (3.10) , (3.11) から

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}(S) = -\int_C \hat{\mathbb{E}} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \hat{\Phi}(S) = \iint_S \hat{\mathbb{B}} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(S) + \iint_S \hat{\mathbb{J}} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \hat{\mathbb{H}} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \hat{\Psi}(S) = \iint_S \hat{\mathbb{D}} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.17}$$

が得られる. これらは真空中の電磁場に対するものと形式的にまったく同じで, 単に $\mathbb{D}$, $\mathbb{B}$,...の代りに平均値 $\hat{\mathbb{D}}$, $\hat{\mathbb{B}}$, ... を用いたものになっている. したがって, これらを微分形で表わすと, 平均値 $\hat{\mathbb{D}}$, $\hat{\mathbb{B}}$ $\hat{\mathbb{E}}$, $\hat{\mathbb{H}}$, ...に対して (3.1) ~ (3.3) の関係が成り立つことがわかる.

すなわち, <u>Maxwell の方程式</u> および <u>電荷保存の方程式</u> が物質中の電磁場に対しても同じ形で成り立つのである.

物質中の電磁場に貯えられる電磁エネルギーと電磁運動量およびそれらの流れについても, '意味のある' 平均値を求めなければならない. 結果はつぎのように 表わされる.

$$\hat{U} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{E}}\cdot\hat{\mathbb{D}} + \hat{\mathbb{H}}\cdot\hat{\mathbb{B}}), \tag{4.18}$$

$$\hat{g} = \hat{\mathbb{D}} \times \hat{\mathbb{B}}, \tag{4.19}$$

$$\hat{S} = \hat{\mathbb{E}} \times \hat{\mathbb{H}}, \tag{4.20}$$

$$\hat{\mathbb{T}}_n = \hat{\mathbb{E}}\hat{D}_n + \hat{\mathbb{H}}\hat{B}_n - \hat{U}\mathbb{n}, \tag{4.21}$$

$$\hat{T}_{ik} = \hat{E}_i\hat{D}_k + \hat{H}_i\hat{B}_k - \hat{U}\delta_{ik}. \tag{4.22}$$

これらも形式的に真空のばあいと同じである．

真空中の電磁場に対しては $\mathbb{D} = \varepsilon_0\mathbb{E}$ ， $\mathbb{B} = \mu_0\mathbb{H}$ の関係が成り立つ． 物質中ではどうであろうか？ 物質中の電磁場は，物質を構成する原子・分子による電磁場を重ね合わせたものである． そのばあい，原子・分子を ‘電気２重極’ および ‘磁気２重極’ で代表させることができるだろう． いま，微視的には大きく巨視的には微小な体積 ΔV に N 個の原子・分子が含まれているとして，それらの 2重極モーメント $\mathbb{p}_i$ ， $\mathbb{m}_i$ の‘体積平均’

$$\langle \mathbb{p} \rangle \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{p}_i, \tag{4.23}$$

$$\langle \mathbb{m} \rangle \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{m}_i \tag{4.24}$$

を考える．

$$\mathbb{P} = \langle \mathbb{p} \rangle, \qquad \mathbb{M} = \langle \mathbb{m} \rangle \tag{4.25}$$

をそれぞれ物質の 電気分極 および 磁気分極 という． このように定義すると

$$\hat{\mathbb{D}} = \varepsilon_0\hat{\mathbb{E}} + \mathbb{P}, \quad \hat{\mathbb{B}} = \mu_0\hat{\mathbb{H}} + \mathbb{M} \tag{4.26}$$

の関係が成り立つことが証明される．

電場や磁場があまり強くないばあい， $\mathbb{P}$ ， $\mathbb{M}$ はそれぞれ電場，磁場に比例して変化するだろうと考えられる：

$$\mathbb{P} = \chi_e\varepsilon_0\hat{\mathbb{E}}, \qquad \mathbb{M} = \chi_m\mu_0\hat{\mathbb{H}}. \tag{4.27}$$

χ_e は 電気感受率， χ_m は 磁化率 とよばれる． また (4.26) は

$$\hat{\mathbb{D}} = \varepsilon \hat{\mathbb{E}}, \qquad \hat{\mathbb{B}} = \mu \hat{\mathbb{H}} \tag{4.28}$$

の形に表わされる．　ただし

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e), \qquad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \tag{4.29}$$

である．　ε ，μ はそれぞれ物質の 誘電率，透磁率 である．

以上のように物質中の電磁場は真空中の電磁場とまったく同じ形に表わされるので，今後 ‘平均値’ を表わす記号 ^ を省略する．　ただ注意すべきは，$\mathbb{E}$ と $\mathbb{D}$ ，$\mathbb{H}$ と $\mathbb{B}$ とはまったく‘異なる’物理量で，(4.26) の関係で結ばれていることである．　(真空中では $\mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E}$ ，$\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}$ であるから，$\mathbb{E}$ と $\mathbb{D}$ ，$\mathbb{H}$ と $\mathbb{B}$ は‘同じ’物理量で単に比例係数の違いがあるだけのように見える．)

§5．　物体に働く電磁力

閉曲面 S で囲まれた領域 V について運動量保存の法則を考える．　V の中には物質が含まれていてもよい．　いま

$$\tilde{\mathbb{F}} = \iint_S \mathbb{T}_n \, dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbb{g} \, dV \tag{5.1}$$

を考える．　右辺の第 1 項は S を通って流入する電磁運動量，第 2 項の $\partial/\partial t \cdots$ は領域 V に含まれる電磁運動量の増加を表わす．　したがって $\tilde{\mathbb{F}}$ は V 内で単位時間あたりに消滅する電磁運動量を表わしている．運動量保存の法則によれば，これはなにか他の形の運動量に転換するはずである．　V の内部に物体があれば，物体は $\tilde{\mathbb{F}}$ だけの運動量を得ることになる．　つまり，物体には ‘電磁力’ $\tilde{\mathbb{F}}$ が働くのである．

(5.1) は

$$\tilde{\mathbb{F}} = \iiint_V \mathbb{f}^{(em)} \, dV, \tag{5.2}$$

$$\mathbb{f}^{(em)} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbb{g}}{\partial t} \tag{5.3}$$

の形に書き表わされる．　(4.21) と Maxwell の方程式 (3.1), (3.2)

を使って計算すると

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{(em)} - (\rho \mathbb{E} + \mathbb{J} \times \mathbb{B}) &= D_k \partial_i E_k + B_k \partial_i H_k - \partial_i U^{(em)} \\ &= -E_k \partial_i D_k - H_k \partial_i B_k + \partial_i U^{(em)} \\ &= P_k \partial_i E_k + M_k \partial_i H_k - \partial_i U^{(pol)} \end{aligned} \tag{5.4}$$

が得られる．　ただし

$$U^{(em)} = \frac{1}{2}(\mathbb{E} \cdot \mathbb{D} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{B}), \tag{5.5}$$

$$U^{(pol)} = -\frac{1}{2}(\mathbb{P} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}). \tag{5.6}$$

$U^{(em)}$ は 電磁エネルギー密度，$U^{(pol)}$ は 分極エネルギー密度である．

(5.4) は物質の単位体積あたりに働く電磁力，すなわち 電磁力密度の一般公式である．　(非定常の電磁場に対しても成り立つことに注意！)

真空中では $\mathbb{P} = 0$，$\mathbb{M} = 0$ であるから，(5.4) は $\mathbb{f}^{(em)} = \rho \mathbb{E} + \mathbb{J} \times \mathbb{B}$ となる．

§6．　物質に働く電磁力のモーメント

角運動量についても上と同様のとり扱いができる．　すなわち，領域 V での電磁角運動量の消滅は

$$\tilde{\mathbb{N}} = \iint_S \mathbb{r} \times \mathbb{T}_n \, dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbb{r} \times \mathbb{g} \, dV \tag{6.1}$$

で与えられ，これは

$$\tilde{\mathbb{N}} = \iiint_V \mathbb{N}^{(em)} dV, \tag{6.2}$$

$$\mathbb{N}^{(em)} = \mathbb{r} \times \mathbb{f}^{(em)} + (\mathbb{P} \times \mathbb{E} + \mathbb{M} \times \mathbb{H}) \tag{6.3}$$

の形に表わされる．　$\mathbb{N}^{(em)}$ は物質の単位体積あたりに働く 電磁力のモーメント (原点のまわりの) である．　注意すべきは，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{E}$，$\mathbb{M}$ と $\mathbb{H}$ が平行でないばあいに，物質の各部分に ‘内在的’ な電磁力

モーメント　$\mathbb{P}\times\mathbb{E}+\mathbb{M}\times\mathbb{H}$　が働くことである．

§7．電磁エネルギーの消滅

領域 V に含まれる電磁エネルギーの消滅は

$$\tilde{W}=-\iint_S S_n\,dS-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V U^{(em)}\,dV \tag{7.1}$$

で与えられる．ここで $\mathbb{S}=\mathbb{E}\times\mathbb{H}$ は Poynting ベクトルである．

(7.1) は

$$\tilde{W}=\iiint_V W^{(em)}\,dV, \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} W^{(em)}&-\mathbb{J}\cdot\mathbb{E}\\ &=\mathbb{E}\cdot\dot{\mathbb{D}}+\mathbb{H}\cdot\dot{\mathbb{B}}-\dot{U}^{(em)}\\ &=-\dot{\mathbb{E}}\cdot\mathbb{D}-\dot{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{B}+\dot{U}^{(em)}\\ &=\mathbb{E}\cdot\dot{\mathbb{P}}+\mathbb{H}\cdot\dot{\mathbb{M}}-\dot{U}^{(pol)} \end{aligned} \tag{7.3}$$

の形に表わされる．ただし $\partial/\partial t\equiv\dot{}$ とする．真空中では $\mathbb{P}=\mathbb{M}=U^{(pol)}=0$ であるから，$W^{(em)}=\mathbb{J}\cdot\mathbb{E}$ が成り立つ．

§8．連続物体の運動方程式

連続物体の運動方程式は運動量保存の法則を数式的に表現したものである．閉曲面 S で囲まれた領域 V に含まれる全運動量の時間的変化を考えると

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V(\rho v_i+g_i)\,dV=-\iint_S\rho v_i v_n\,dS$$
$$+\iint_S p_{ik}n_k\,dS+\iint_S T_{ik}n_k\,dS+\iiint_V\rho K_i\,dV \tag{8.1}$$

が得られる．ここで，ρ は物体の密度，$\mathbb{v}$ は速度，p_{ik} は（機械的）応力，$\mathbb{K}$ は外力（単位質量あたり）である．(8.1) を微分形で表わすと

$$\rho\frac{D\mathbb{v}}{Dt}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}+\rho\mathbb{K}+\mathbb{f}^{(em)} \tag{8.2}$$

となる． これが電磁場の影響のもとでの連続物体の運動方程式である．
ここで $\mathbb{f}^{(em)}$ は電磁力で (5.4) で与えられる．

§9. 連続物体の角運動量方程式

角運動量について上と同様のとり扱いをすると

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V (\rho\mathbb{L} + \boldsymbol{r}\times\mathbb{g})dV$$
$$= -\iint_S \rho\mathbb{L}v_n\,dS + \iint_S \boldsymbol{r}\times(\mathbb{p}_n + \mathbb{T}_n)dS$$
$$+ \iint_S \mathbb{c}_n\,dS + \iiint_V (\boldsymbol{r}\times\mathbb{K} + \mathbb{G})\rho\,dV \qquad (9.1)$$

が得られる． $\mathbb{L}$ は物体の単位質量のもつ（原点のまわりの）角運動量で，

$$\mathbb{L} = \boldsymbol{r}\times\mathbb{v} + \boldsymbol{s} \qquad (9.2)$$

のように表わされる． $\boldsymbol{s}$ は物体の各部分に‘内在的’に貯えられる角運動量，すなわち 内部角運動量（単位質量あたり）である． $\mathbb{c}_n$ は内部角運動量の‘伝導的’な流れを表わすベクトル，すなわち 回転応力ベクトル であって， 応力ベクトル $\mathbb{p}_n$ と同様

$$\mathbb{c}_n = \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{n} = c_{ik}n_k \qquad (9.3)$$

のように 回転応力テンソル c_{ik} を使って表わされる． $\mathbb{G}$ は物体の各部分に働く（単位質量あたりの）回転力のモーメント である．

(9.1) を微分形で表わし，運動方程式を考慮すれば

$$\rho\frac{D\boldsymbol{s}}{Dt} = \frac{\partial c_{ik}}{\partial x_k} - \varepsilon_{ijk}p_{jk} + \rho\mathbb{G} + \mathbb{P}\times\mathbb{E} + \mathbb{M}\times\mathbb{H} \qquad (9.4)$$

が得られる．

注意すべきは，Maxwell 応力 T_{ik} は必ずしも対称テンソルではないことである． それは $\mathbb{P}\,/\!/\,\mathbb{E}$ ， $\mathbb{M}\,/\!/\,\mathbb{H}$ が必ずしも成り立たないためである． その結果，物体の応力テンソル p_{ik} は一般に対称的ではない． いま

$$p_{ik} = p_{ik}^{(s)} + p_{ik}^{(a)}, \qquad (9.5)$$

$$p_{ik}^{(s)} = \frac{1}{2}(p_{ik} + p_{ki}), \qquad p_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2}(p_{ik} - p_{ki}) \tag{9.6}$$

のように<u>対称部分</u> $p_{ik}^{(s)}$ と<u>反対称部分</u> $p_{ik}^{(a)}$ に分解すると，(8.2)，(9.4) はそれぞれ

$$\rho\frac{D\mathbb{v}}{Dt} = \rho\mathbb{K} + \frac{\partial p_{ik}^{(s)}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\,rot\,\mathbb{p}^{(a)} + \mathbb{f}^{(em)}, \tag{9.7}$$

$$\rho\frac{D\mathbb{s}}{Dt} = \rho\mathbb{G} + \mathbb{p}^{(a)} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial x_k} + \mathbb{P}\times\mathbb{E} + \mathbb{M}\times\mathbb{H} \tag{9.8}$$

となる．　ただし

$$p_i^{(a)} = -\varepsilon_{ijk}\,p_{jk}^{(a)}, \tag{9.9}$$

すなわち　$\mathbb{p}^{(a)} = -2(p_{23}^{(a)},\ p_{31}^{(a)},\ p_{12}^{(a)})$

である．

内部角運動量の存在しないばあい（$\mathbb{s}=0$），ふつう $\mathbb{G}=0$，$c_{ik}=0$ である．　したがって (9.8) は

$$\mathbb{p}^{(a)} = -(\mathbb{P}\times\mathbb{E} + \mathbb{M}\times\mathbb{H}) \tag{9.10}$$

を与える．　すなわち，非等方的な媒質では，電磁場をかけたとき応力は非対称部分 $p_{ik}^{(a)}$ を含むのである．

§10.　<u>連続物体のエネルギー方程式</u>

領域 V に含まれる全エネルギーの保存は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left\{\frac{\rho}{2}(v^2 + I\Omega^2) + \rho U + U^{(em)}\right\}dV \\
&\quad = -\iint_S\left\{\frac{1}{2}(v^2 + I\Omega^2) + U\right\}\rho v_n\,dS + \iint_S \mathbb{p}_n\cdot\mathbb{v}\,dS \\
&\qquad + \iint_S \mathbb{c}_n\cdot\mathbb{\Omega}\,dS + \iiint_V \rho\mathbb{K}\cdot\mathbb{v}\,dV + \iiint_V \rho\mathbb{G}\cdot\mathbb{\Omega}\,dV \\
&\qquad - \iint_S S_n\,dS + \delta\tilde{Q}
\end{aligned} \tag{10.1}$$

のように表わされる．　ただし，内部角運動量 $\mathbb{s}$ は

$$S = I\Omega \tag{10.2}$$

のように角速度 Ω で回転する 慣性モーメント I の球状微粒子によるものと仮定する．（$\frac{\rho}{2}I\Omega^2$ は内部回転による運動エネルギーである．）

U は物質の内部エネルギー（単位質量あたり），また $\delta\tilde{Q}$ は外部から導入される熱量である． (10.1) を微分形で表現すると

$$\rho\frac{DU}{Dt} = \frac{D}{Dt}U^{(em)} - \mathbb{D}\cdot\frac{D\mathbb{E}}{Dt} - \mathbb{B}\cdot\frac{D\mathbb{H}}{Dt} - \boldsymbol{\Omega}\cdot(\mathbb{P}\cdot\mathbb{E} + \mathbb{M}\cdot\mathbb{H})$$
$$+ \mathbb{p}^{(a)}\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}\right) + p_{ik}^{(s)}e_{ik} + c_{ik}\partial_k\Omega_i$$
$$+ Q_J + \delta Q \tag{10.3}$$

となる． ここで

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \tag{10.4}$$

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{10.5}$$

Q_J は Joule 熱 で (3.7) で与えられる． $\boldsymbol{\omega}$ は 渦度， e_{ik} は 変形速度テンソル である．

(10.3) は連続物体の エネルギー方程式 である． これを基にして，物体の熱力学的性質を議論することができる．

§１１． 非粘性流体の運動

流体は ‘静止状態において応力が等方テンソルであるような連続物体’として定義される：

$$p_{ik} = -p\,\delta_{ik}. \tag{11.1}$$

運動状態においても (11.1) が成り立つような流体が 非粘性流体 である．

以下，非粘性流体について考えよう．

このばあい $\mathbb{p}^{(a)} = 0$ である． また

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = -\delta_{ik}\partial_k p = -\partial_i p = -\mathrm{grad}\,p$$

であるから，運動方程式 (8.2) は

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \mathbb{K} - \mathrm{grad}\, p + \mathbb{f}^{(em)} \tag{11.2}$$

となる． 一見，ふつうの運動方程式で電磁力 $\mathbb{f}^{(em)}$が追加されているだけである． ただし，圧力 p に電磁場の影響が現われる可能性がある．これを確かめるのにエネルギー方程式（10.3）が役立つ．

流体は電磁的に等方的であると仮定する：

$$\mathbb{P} \parallel \mathbb{E}, \qquad \mathbb{M} \parallel \mathbb{H}. \tag{11.3}$$

ふつう $\mathbb{G} = 0$ ， $c_{ik} = 0$ と考えられるから，（9.8）から

$$\frac{Ds}{Dt} = 0. \tag{11.4}$$

すなわち，“内部角運動量は保存される．” また，<u>連続の方程式</u>

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{11.5}$$

から

$$\Theta = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \tag{11.6}$$

が得られる． さて

$$\begin{aligned} p_{ik}^{(s)} e_{ik} &= -p\, \delta_{ik} e_{ik} = -p\, e_{kk} \\ &= -p\Theta = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \tag{11.7}$$

であるから，（10.3）は

$$dU = v\{dU^{(em)} - (\mathbb{D} \cdot d\mathbb{E} + \mathbb{B} \cdot d\mathbb{H})\} - p\,dv + v\,\delta Q' \tag{11.8}$$

と書ける． ただし

$$v = \frac{1}{\rho}, \qquad \delta Q' = (Q_J + \delta Q)\,dt \tag{11.9}$$

とおく． v は単位質量あたりの体積，すなわち <u>比体積</u> である．また $\delta Q'$ は物質の単位体積あたりに導入される熱量である． <u>準静的過程</u> では

$$v\,\delta Q' = T\,dS \tag{11.10}$$

が成り立つ． T は <u>絶対温度</u>， S は <u>エントロピー</u>（単位質量あたり）である． したがって（11.8）は

$$dU = v\{dU^{(em)} - (\mathbb{D}\cdot d\mathbb{E} + \mathbb{B}\cdot d\mathbb{H})\} - p\,dv + T\,dS \tag{11.11}$$

の形に書ける． これは “物質の熱力学状態が $(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H})$ で決定される” ことを示している．

そこで

$$U^*(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^{\mathbb{E}} \mathbb{D}\cdot d\mathbb{E} + \int_0^{\mathbb{H}} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{H}\right)_{v,S} \tag{11.12}$$

を定義する． ただし $(\cdots\cdots)_{v,S}$ は v，S を一定に保っての積分を意味する． (11.11) は

$$dU = v\left\{dU^{(em)} - dU^* + \frac{\partial U^*}{\partial v}dv + \frac{\partial U^*}{\partial S}dS\right\} - p\,dv + T\,dS \tag{11.13}$$

となる． さらに

$$U_1(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) \stackrel{\text{def}}{=} U^{(em)} - U^*, \tag{11.14}$$

$$U = U_0 + vU_1 \tag{11.15}$$

とおくと，(11.13) は

$$dU_0 = \left(-U_1 + v\frac{\partial U^*}{\partial v} - p\right)dv + \left(v\frac{\partial U^*}{\partial S} + T\right)dS \tag{11.16}$$

となる． これは U_0 が (v, S) だけの関数であることを示している．すなわち，U_0 は $\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$ に依存しない． $\mathbb{E} = 0$，$\mathbb{H} = 0$ （したがって $U_1 = U^* = 0$ ）のばあいでも (11.16) が成り立つから

$$dU_0 = -p_0(v, S)\,dv + T_0(v, S)\,dS. \tag{11.17}$$

ただし

$$p_0(v, S) = p(v, S, 0, 0), \qquad T_0(v, S) = T(v, S, 0, 0)$$

は $\mathbb{E} = 0$，$\mathbb{H} = 0$ に対する圧力および温度である．(11.16) と (11.17) を比較すれば

$$p = p_0(v, S) + v\frac{\partial U^*}{\partial v} - U_1, \tag{11.18}$$

$$T = T_0(v, S) - v\frac{\partial U^*}{\partial S} \tag{11.19}$$

が得られる． これは圧力 p ，温度 T に対する電磁場 $\mathbb{E}$ ，$\mathbb{H}$ の影響を具体的に示す公式である．

(11.15)，(11.18)，(11.19) は流体が 等エントロピー変化（S＝const) をするばあいに便利な公式である． 等温変化（T＝const） に対しては独立変数として（ v ，T ）をとり，従属変数として 自由エネルギー

$$F = U - TS \tag{11.20}$$

をとればよい． 上と同様のとり扱いで

$$F^* \overset{\text{def}}{=\!=} \left(\int_0^{E} \mathbb{D}\cdot d\mathbb{E} + \int_0^{H} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{H}\right)_{v,T}, \tag{11.21}$$

$$F_1 = U^{(em)} - F^* \tag{11.22}$$

とおけば

$$F = F_0(v,T) + vF_1, \tag{11.23}$$

$$p = p_0(v,T) + v\frac{\partial F^*}{\partial v} - F_1, \tag{11.24}$$

$$S = S_0(v,T) + v\frac{\partial F^*}{\partial T} \tag{11.25}$$

が得られる． なお，エンタルピー H ，Gibbs の自由エネルギー G は

$$H = U + pv, \qquad G = F + pv \tag{11.26}$$

で定義される． これらは (11.15)，(11.18)；(11.23)，(11.24) により

$$H = H_0(p_0, S) + v^2\frac{\partial U^*}{\partial v}, \tag{11.27}$$

$$G = G_0(p_0, T) + v^2\frac{\partial F^*}{\partial v} \tag{11.28}$$

と書き表わされる． ただし $H_0(p_0,S)$, $G_0(p_0,T)$ は電磁場の存在しないばあいの H および G であって，物質について固有の関数形をもつ．

§12． 流体に働く電磁力 ――― 在来の理論との比較

電磁力の公式 (5.4) によれば，電荷および電流に働く力は，物質中でも真空中でも $\boldsymbol{f}^{(em)} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ である．（この第２項を $\mu_0\mathbb{J}\times\mathbb{H}$ と

するのは誤りである！）

以下，電荷も電流もないばあい（ $\rho=0, \mathbb{J}=0$ ）を考えよう．

（ｉ） $\varepsilon, \mu = \mathrm{const}$ のばあい

$\mathbb{D}=\varepsilon\mathbb{E}$, $\mathbb{B}=\mu\mathbb{H}$ で $\varepsilon, \mu = \mathrm{const}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f^{(em)} &= D_k \partial_i E_k + B_k \partial_i H_k - \partial_i U^{(em)} \\
&= \varepsilon E_k \partial_i E_k + \mu H_k \partial_i H_k - \partial_i(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/2 \\
&= 0. \qquad (12.1)
\end{aligned}
$$

すなわち，“ ε, μ が一定の物質には電磁力は働かない．” この事実はきわめて重要である． 電磁場中での連続物体のつりあいや運動を議論する際に，物体の内部ではふつうの（電磁場を考慮しない）運動方程式をそのまま使うことができるからである． “電磁場の影響は境界条件を通じてのみ現われる．”

（ii） 電磁的に線形の流体

$\mathbb{D} /\!/ \mathbb{E}$, $\mathbb{B} /\!/ \mathbb{H}$ すなわち

$$
\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E}, \quad \mathbb{B} = \mu \mathbb{H} \qquad (12.2)
$$

が成り立ち， ε, μ が ρ, T のみの関数として変化するばあい，物質は 電磁的に線形 であるという．

このばあい，

$$
\begin{aligned}
f^{(em)} &= D_k \partial_i E_k + B_k \partial_i H_k - \partial_i U^{(em)} \\
&= \varepsilon E_k \partial_i E_k + \mu H_k \partial_i H_k - \partial_i \left\{ \tfrac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \right\} \\
&= -\frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{H^2}{2} \operatorname{grad} \mu. \qquad (12.3)
\end{aligned}
$$

さて，現行の電磁気学の本を見ると，電磁力に対して

$$
f_{\mathrm{Kel}} = (\mathbb{P}\cdot\operatorname{grad})\mathbb{E} + (\mathbb{M}\cdot\operatorname{grad})\mathbb{H}, \qquad (12.4)
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{Helm}} = &-\frac{E^2}{2}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left\{E^2\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right\} \\
&-\frac{H^2}{2}\operatorname{grad}\mu + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left\{H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right\} \qquad (12.5)
\end{aligned}
$$

の２つの表式のどちらかが与えられていることが多い．（f_{Kel} は Kelvin 力，f_{Helm} は Helmholtz 力 とよばれる．）これらはどちらもわれわれの一般公式 (12.3) とは一致しない．それでは，これら３つのうちどれが正しいのだろうか？

ε，μ が一定のばあいには $f^{(em)}$ はつねに 0 である．ところが，そのばあいでも f_{Kel} は一般に 0 ではないから，“Kelvin 力は確かに誤りである” といえるだろう．

f_{Helm} の表式は $f^{(em)}$ の表式にない項を含んでいるので，一見，より精密であるように見える．はたしてどうか？

このばあい，(11.12)，(11.21) により

$$U^* = F^* = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = U^{(em)}, \tag{12.6}$$

$$\therefore \quad U_1 = F_1 = 0. \tag{12.7}$$

したがって，(11.18)，(11.24) は

$$p = p_0(\rho, S) - \frac{E^2}{2}\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S - \frac{H^2}{2}\rho\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_S, \tag{12.8}$$

$$p = p_0(\rho, T) - \frac{E^2}{2}\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T - \frac{H^2}{2}\rho\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_T \tag{12.9}$$

となる．

さて，運動方程式 (11.2) で圧力勾配と電磁力とをまとめるとどうなるかを考えよう．

$$\begin{aligned} &-\mathrm{grad}\, p + f^{(em)} \\ &\quad = -\mathrm{grad}\, p_0(\rho, T) + f_{Helm} \end{aligned} \tag{12.10}$$

である．すなわち，電磁力として f_{Helm} を用いるばあいには，圧力として $p_0(\rho, T)$ を用いるべきことがわかる．$p_0(\rho, T)$ は流体の密度 ρ，温度 T を指定したときに，電磁場の存在しないばあいに流体のとるべき圧力の値で，‘熱力学的圧力’ ともよぶべきものである．これに対して p は直接的に流体の運動を支配するもので，‘機械的圧力’ とよぶ

ことができるだろう． 上のように解釈すれば Helmholtz 力の正当性は根拠づけられる． しかし，運動方程式のとり扱い，とくに境界条件の考察において直接関与するのは機械的圧力であるから，Helmholtz 力の利用価値はほとんどないと思う．

§13． 不連続面に働く電磁力

媒質の電磁的性質が不連続的に変化する面，すなわち 不連続面 では，周知のように電場と磁場は不連続的に変化する． したがって，Maxwell 応力も不連続的に変化する． その結果，不連続面には電磁力が働く． これらは数量的につぎのように表わされる．

不連続面を負の側から正の側に横切るときに量 Q におこる‘とび’を $\{Q\}_\pm$ で表わすことにすれば

$$\{D_n\}_\pm = \sigma, \qquad \{B_n\}_\pm = 0, \tag{13.1}$$

$$\{\mathbb{E}_t\}_\pm = 0, \qquad \{\mathbb{H}_t\}_\pm = \mathbb{J}_s \times \boldsymbol{n}, \tag{13.2}$$

$$\{\mathbb{E} \times \boldsymbol{n}\}_\pm = 0, \qquad \{\mathbb{H} \times \boldsymbol{n}\}_\pm = -\mathbb{J}_s . \tag{13.3}$$

ただし， σ は電荷の面密度， $\mathbb{J}_s$ は電流の面密度， $\boldsymbol{n}$ は不連続面の法線ベクトル，添字 n ， t はそれぞれ法線成分および接線成分を表わす． また，不連続面に働く Maxwell 応力ベクトルの電場と磁場によるものをそれぞれ $\mathbb{T}_n^{(e)}$ ， $\mathbb{T}_n^{(m)}$ で表わせば

$$\begin{aligned}
\{\mathbb{T}_n^{(e)}\}_\pm - \sigma\langle\mathbb{E}\rangle
&= \frac{1}{2}\left(\{\mathbb{E}\}\cdot\langle\mathbb{D}\rangle - \langle\mathbb{E}\rangle\cdot\{\mathbb{D}\}\right)\boldsymbol{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_+\cdot\mathbb{D}_- - \mathbb{E}_-\cdot\mathbb{D}_+\right)\boldsymbol{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_+\cdot\mathbb{P}_- - \mathbb{E}_-\cdot\mathbb{P}_+\right)\boldsymbol{n} ,
\end{aligned} \tag{13.4}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbb{T}_n^{(m)}\}_\pm - \mathbb{J}_s \times \langle\mathbb{B}\rangle
&= \frac{1}{2}\left(\{\mathbb{H}\}\cdot\langle\mathbb{B}\rangle - \langle\mathbb{H}\rangle\cdot\{\mathbb{B}\}\right)\boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{H}_+ \cdot \mathbb{B}_- - \mathbb{H}_- \cdot \mathbb{B}_+)\mathbb{n}$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbb{H}_+ \cdot \mathbb{M}_- - \mathbb{H}_- \cdot \mathbb{M}_+)\mathbb{n} \tag{13.5}$$

が成り立つ．　ただし

$$\{Q\} = Q_+ - Q_-, \quad \langle Q \rangle = \frac{1}{2}(Q_+ + Q_-) \tag{13.6}$$

は不連続面での量　Q　の‘とび’および‘平均’を意味する．$\{\mathbb{T}_n\}_\pm$ は不連続面に働く電磁力を与える．“$\sigma\langle\mathbb{E}\rangle$ ，$\mathbb{J}_s \times \langle\mathbb{B}\rangle$ の項を除けば，電磁力はつねに不連続面に垂直に働く”ことに注意してほしい．　もしも物体の　ε ，μ　が一定であれば，物体内部の各点に働く電磁場は 0 であるから，電磁場をかけるとき，物体にはその表面に法線方向の電磁力が働くだけなのである．

§14．Bernoulli の定理の一般化

いま，流体中に電荷も電流も存在しないものとする．　このばあいには，(5.4) は，(11.12) と (11.21) により，

$$f^{(em)} = D_k \partial_i E_k + B_k \partial_i H_k - \partial_i U^{(em)}$$
$$= -\left(\partial_i U_1 + \frac{\partial U^*}{\partial v}\partial_i v + \frac{\partial U^*}{\partial S}\partial_i S\right) \tag{14.1}$$
$$= -\left(\partial_i F_1 + \frac{\partial F^*}{\partial v}\partial_i v + \frac{\partial F^*}{\partial T}\partial_i T\right) \tag{14.2}$$

となる．　さて運動方程式 (11.2) は

$$\frac{D\mathbb{v}}{Dt} = \mathbb{K} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \frac{1}{\rho} f^{(em)} \tag{14.3}$$

である．　これを具体的にとり扱うために，流れが等温的におこるばあいと等エントロピー的におこるばあいに分けて考えよう．

(i) 等温の流れ (T = const)

(14.2) を使う．　(14.3) は

$$\frac{D\mathbb{v}}{Dt} = \mathbb{K} - v\left(\partial_i p + \partial_i F_1 + \frac{\partial F^*}{\partial v}\partial_i v\right)$$
$$= K - \partial_i\left\{G_0(p_0, T) + v^2\frac{\partial F^*}{\partial v}\right\}\cdot$$

$$= \mathbb{K} - \mathrm{grad}\ G(v, T, \mathbb{E}, \mathbb{H}) \tag{14.4}$$

のように変形できる． ここで G は (11.28) で与えられた Gibbsの自由エネルギーである．

(ii) 等エントロピーの流れ（S＝ const)

(14.1) を使って上と同様の計算をすると

$$\frac{\mathcal{D}\mathbb{v}}{\mathcal{D}t} = \mathbb{K} - \mathrm{grad}\ H(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) \tag{14.5}$$

が得られる．

(14.4)，(14.5) を基にしてふつうの流体力学と同様の扱いをすると，Bernoulli の定理の一般化が得られる．すなわち,外力が保存力のばあい

$$\mathbb{K} = -\mathrm{grad}\ \Omega \tag{14.6}$$

とおいて，Bernoulli 関数 を

$$\mathcal{B} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}q^2 + \Omega + \begin{cases} G(v, T, \mathbb{E}, \mathbb{H}) & (T = \mathrm{const}) \\ H(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) & (S = \mathrm{const}) \end{cases} \tag{14.7}$$

で定義すると，定常流に対しては

$$\mathbb{v} \times \boldsymbol{\omega} = \mathrm{grad}\ \mathcal{B}, \tag{14.8}$$

渦無しの流れに対しては， $\mathbb{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$ として

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{B} = f(t) \tag{14.9}$$

が得られる． (14.8) は Bernoulli の定理の一般化を与え，(14.9) は圧力方程式の一般化を与える．

(iii) 特別なばあい

(a) 縮まない流体（ ρ ＝const)

$$\rho G = \rho(F + pv) = \rho(F_0 + vF_1 + vp)$$
$$= p + F_1 + \rho F_0 \qquad \because\ v = \frac{1}{\rho}.$$

F_0 は自由エネルギーであるから

$$dF_0 = -p_0\, dv - S\, dT = 0,$$

$$\because \quad dv = 0, \quad dT = 0.$$
$$\therefore \quad F_0 = \text{const}.$$

定数項 ρF_0 を除くと

$$\rho \mathcal{B} = \frac{\rho}{2} q^2 + \rho\Omega + p + F_1(\rho, T, \mathbb{E}, \mathbb{H}). \tag{14.10}$$

同様に，S = const に対して

$$\rho \mathcal{B} = \frac{\rho}{2} q^2 + \rho\Omega + p + U_1(\rho, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) \tag{14.11}$$

が得られる．

(b) 電磁的に線形の流体

$$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E}, \qquad \mathbb{B} = \mu \mathbb{H} \tag{14.12}$$

が成り立ち，ε，μ が ρ，T の関数として変化し得るばあいである．

このばあい (11.12), (11.21) から

$$U^* = F^* = U^{(em)} = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2), \tag{14.13}$$

$$U_1 = F_1 = 0 \tag{14.14}$$

が得られる．

したがって，縮まない流体のばあいには，(14.10)，(14.11)によって，Bernoulli の定理は形式的に電磁場の存在しないばあいとまったく同じになる． 縮む流体のばあいには，(14.13)を(11.28),(11.29)に代入して

$$G(v, T, \mathbb{E}, \mathbb{H}) = G_0(p_0, T) - \frac{E^2}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T - \frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_T, \tag{14.15}$$

$$H(v, S, \mathbb{E}, \mathbb{H}) = H_0(p_0, S) - \frac{E^2}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S - \frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_S \tag{14.16}$$

が得られる． これらを(14.7)に代入すればよい． Bernoulli の定理の一般化の具体的な応用例については文献 [12] を見ていただきたい．

§15. まとめ

誘電性流体や磁性流体の流体力学を建設するための基礎として，流体の各

部分に働く電磁力に対する厳密な表式を与えた． これを導くためには，筆者の試みている‘新しい電磁気学の体系’によるのが便利であると思う．ここではそれの要約を示したが，詳しくは参考文献を参照されたい．

参考文献

今井 功： 電磁気学を考える，「数理科学」（サイエンス社）
1 (1985年,3月)，2 (5月)，3 (7月)，4 (8月)，5 (11月)，6 (1986年,1月) 7 (2月)，8 (5月)，9 (7月)，１０ (8月)，１１ (10月)，１２ (12月)，１３ (1987年,3月)，１４ (6月)，１５ (9月)，１６ (1988年,1月)．